

Bernuli, Ojler i pogrešno adresirana pisma

Marija Stanić
stanicm@kg.ac.rs

Institut za matematiku i informatiku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Kragujevcu

Decembar, 2008

*“Predmet matematike je toliko težak
da ne treba prepustiti slučaju
da se učini zanimljivim.”*

—PJER SIMON LAPLAS

*“Šteta je što nisam bolje
znao matematiku.”*

—ALBERT AJNŠTAJN

Bazel, Švajcarska - centar nauke

Bazel, kao slobodan imperatorski grad još od 1263. godine, dugo je bio centar nauke.

Bazel, Švajcarska - centar nauke

Bazel, kao slobodan imperatorski grad još od 1263. godine, dugo je bio centar nauke.

Pod upravom trgovačkog patricijata, nauka i umetnost su cvetali u Bazelu.

Bazel, Švajcarska - centar nauke

Bazel, kao slobodan imperatorski grad još od 1263. godine, dugo je bio centar nauke.

Pod upravom trgovačkog patricijata, nauka i umetnost su cvetali u Bazelu. Tom bazelskom patricijatu pripadala je i porodica Bernuli, koja se u XVII veku tu preselila iz Antverpena kada su taj grad osvojili Španci.

Bazel, Švajcarska - centar nauke

Bazel, kao slobodan imperatorski grad još od 1263. godine, dugo je bio centar nauke.

Pod upravom trgovačkog patricijata, nauka i umetnost su cvetali u Bazelu. Tom bazelskom patricijatu pripadala je i porodica Bernuli, koja se u XVII veku tu preselila iz Antverpena kada su taj grad osvojili Španci.

Od kraja XVII veka ta porodica je davala po nekog naučnika u svakoj generaciji.

Dinastija Bernuli

Osnivač dinastije bio je Nikolas Bernuli.

Dinastija Bernuli

Osnivač dinastije bio je Nikolas Bernuli.

Njegovi sinovi Jakob (1654-1705) i Johan (1667-1748) su bili značajni matematičari.

Dinastija Bernuli

Osnivač dinastije bio je Nikolas Bernuli.

Njegovi sinovi Jakob (1654-1705) i Johan (1667-1748) su bili značajni matematičari.

I njihov bratanac Nikolas II (1687-1759) je bio poznati matematičar.

Dinastija Bernuli

Osnivač dinastije bio je Nikolas Bernuli.

Njegovi sinovi Jakob (1654-1705) i Johan (1667-1748) su bili značajni matematičari.

I njihov bratanac Nikolas II (1687-1759) je bio poznati matematičar.

Johanovi sinovi Nikolas III (1695-1726) i Daniel (1700-1782) su takođe bili istaknuti matematičari.

Nikolas II Bernuli

- ortogonalne trajektorije

Nikolas II Bernuli

- ortogonalne trajektorije
- diferencijalne jednačine

Nikolas II Bernuli

- ortogonalne trajektorije
- diferencijalne jednačine
- integralni račun

Nikolas II Bernuli

- ortogonalne trajektorije
- diferencijalne jednačine
- integralni račun
- verovatnoća

Nikolas II Bernuli

- ortogonalne trajektorije
- diferencijalne jednačine
- integralni račun
- verovatnoća

Bio je urednik sabranih dela svoga strica Jakoba Bernulija, član Kraljevskog naučnog društva u Londonu i član Bolonjske akademije.

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena.

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena.
Napisao je preko 900 naučnih radova iz

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena.
Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike,

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, hidrodinamike

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, hidrodinamike i astronomije.

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, hidrodinamike i astronomije.

Skoro polovinu svojih radova napisao je kao potpuno slep.

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, hidrodinamike i astronomije.

Skoro polovinu svojih radova napisao je kao potpuno slep.

Veliki broj matematičkih termina nosi njegovo ime.

Leonard Ojler

Ojler je svakako bio jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Napisao je preko 900 naučnih radova iz algebre, diferencijalnih jednačina, stepenih redova, specijalnih funkcija, diferencijalne geometrije, teorije brojeva, racionalne mehanike, varijacionog računa, muzike, optike, hidrodinamike i astronomije.

Skoro polovinu svojih radova napisao je kao potpuno slep.

Veliki broj matematičkih termina nosi njegovo ime.

Bio je član Petersburške i Berlinske akademije nauka.

Bazel XVIII vek
Nicolas II Bernoulli (1687-1759)
Leonhard Euler (1707-1783)
Pogrešno adresirana pisma
Nenapadajući topovi

Ojlerov disk

Bazel XVIII vek
Nicolas II Bernoulli (1687-1759)
Leonhard Euler (1707-1783)
Pogrešno adresirana pisma
Nenapadajući topovi

Ojlerov disk

Problem pogrešno adresiranih pisama

Napisano je k pisama, po jedno svakoj od k različitih osoba, i adresirano je k koverata sa njihovim adresama. Na koliko različitih načina je moguće ubaciti ova pisma u koverte tako da svako pismo bude u pogrešnoj koverti?

Problem pogrešno adresiranih pisama

Napisano je k pisama, po jedno svakoj od k različitih osoba, i adresirano je k koverata sa njihovim adresama. Na koliko različitih načina je moguće ubaciti ova pisma u koverte tako da svako pismo bude u pogrešnoj koverti?

Ovaj problem je prvi razmatrao Nikolas II Bernuli, a nezavisno od njega kasnije ga je rešio i Ojler.

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena).

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \nmid P_j$.

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \nmid P_j$. Neka je $M(k)$ traženi broj pogrešnih rasporeda.

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \nmid P_j$.

Neka je $M(k)$ traženi broj pogrešnih rasporeda. U nastavku ćemo pod *rasporedom* podrazumevati ponovno raspoređivanje objekata pod uslovima navedenim u zadatku, bez posebnog naglašavanja.

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \nmid P_j$.

Neka je $M(k)$ traženi broj pogrešnih rasporeda. U nastavku ćemo pod *rasporedom* podrazumevati ponovno raspoređivanje objekata pod uslovima navedenim u zadatku, bez posebnog naglašavanja.

Posmatraćemo dva različita slučaja:

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \nmid P_j$.

Neka je $M(k)$ traženi broj pogrešnih rasporeda. U nastavku ćemo pod *rasporedom* podrazumevati ponovno raspoređivanje objekata pod uslovima navedenim u zadatku, bez posebnog naglašavanja.

Posmatraćemo dva različita slučaja:

- $a_1 \Downarrow P_2$ i $a_2 \Downarrow P_1$, dok objekti a_3, \dots, a_k zauzimaju pozicije iz skupa $\{P_3, \dots, P_k\}$, ali tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$;

Očigledno je da se u slučaju $k = 1$ pismo ne može ubaciti u pogrešan koverat i da se u slučaju $k = 2$ ta dva pisma na samo jedan način mogu ubaciti u pogrešno adresirane koverte.

Označimo sa a_1, a_2, \dots, a_k pisma (objekte), a sa P_1, P_2, \dots, P_k njihove pozicije (koverte u koje su stavljena). Ako je pismo a_i stavljeno u koverat P_j pisaćemo $a_i \Downarrow P_j$, a ako nije pisaćemo $a_i \Uparrow P_j$.

Neka je $M(k)$ traženi broj pogrešnih rasporeda. U nastavku ćemo pod *rasporedom* podrazumevati ponovno raspoređivanje objekata pod uslovima navedenim u zadatku, bez posebnog naglašavanja.

Posmatraćemo dva različita slučaja:

- $a_1 \Downarrow P_2$ i $a_2 \Downarrow P_1$, dok objekti a_3, \dots, a_k zauzimaju pozicije iz skupa $\{P_3, \dots, P_k\}$, ali tako da $a_i \Uparrow P_i$, $i = 3, \dots, k$;
- $a_1 \Downarrow P_2$, ali $a_2 \Uparrow P_1$.

U prvom slučaju objekti a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_3, \dots, P_k , tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$, pa je broj mogućih rasporeda $M(k - 2)$.

U prvom slučaju objekti a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_3, \dots, P_k , tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$, pa je broj mogućih rasporeda $M(k-2)$.

Drugi slučaj je ekvivalentan sledećoj situaciji: objekti a_2, a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_1, P_3, \dots, P_k , tako da $a_2 \nmid P_1$, $a_3 \nmid P_3$, \dots , $a_k \nmid P_k$. Prema tome broj rasporeda u ovom slučaju je $M(k-1)$.

U prvom slučaju objekti a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_3, \dots, P_k , tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$, pa je broj mogućih rasporeda $M(k - 2)$.

Drugi slučaj je ekvivalentan sledećoj situaciji: objekti a_2, a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_1, P_3, \dots, P_k , tako da $a_2 \nmid P_1$, $a_3 \nmid P_3$, \dots , $a_k \nmid P_k$. Prema tome broj rasporeda u ovom slučaju je $M(k - 1)$.

Na osnovu ova dva slučaja zaključujemo da je broj rasporeda u kojima se pismo a_1 nalazi u kovertu P_2 jednak $M(k - 2) + M(k - 1)$.

U prvom slučaju objekti a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_3, \dots, P_k , tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$, pa je broj mogućih rasporeda $M(k-2)$.

Drugi slučaj je ekvivalentan sledećoj situaciji: objekti a_2, a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_1, P_3, \dots, P_k , tako da $a_2 \nmid P_1$, $a_3 \nmid P_3$, \dots , $a_k \nmid P_k$. Prema tome broj rasporeda u ovom slučaju je $M(k-1)$.

Na osnovu ova dva slučaja zaključujemo da je broj rasporeda u kojima se pismo a_1 nalazi u kovertu P_2 jednak $M(k-2) + M(k-1)$.

Sličnu analizu možemo ponoviti pri određivanju broja rasporeda u kojima je redom $a_1 \nmid P_3$, $a_1 \nmid P_4$, \dots , $a_1 \nmid P_k$.

U prvom slučaju objekti a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_3, \dots, P_k , tako da $a_i \nmid P_i$, $i = 3, \dots, k$, pa je broj mogućih rasporeda $M(k-2)$.

Drugi slučaj je ekvivalentan sledećoj situaciji: objekti a_2, a_3, \dots, a_k su distribuirani na pozicijama P_1, P_3, \dots, P_k , tako da $a_2 \nmid P_1$, $a_3 \nmid P_3$, \dots , $a_k \nmid P_k$. Prema tome broj rasporeda u ovom slučaju je $M(k-1)$.

Na osnovu ova dva slučaja zaključujemo da je broj rasporeda u kojima se pismo a_1 nalazi u kovertu P_2 jednak $M(k-2) + M(k-1)$.

Sličnu analizu možemo ponoviti pri određivanju broja rasporeda u kojima je redom $a_1 \nmid P_3$, $a_1 \nmid P_4$, \dots , $a_1 \nmid P_k$. Ovaj broj je uvek isti:

$$M(k-2) + M(k-1).$$

Ukupan broj svih dozvoljenih rasporeda je

$$M(k) = (k - 1)(M(k - 2) + M(k - 1)).$$

Ukupan broj svih dozvoljenih rasporeda je

$$M(k) = (k-1)(M(k-2) + M(k-1)).$$

Poslednja rekurentna relacija se može napisati u obliku

$$(\clubsuit) \quad M(k) - kM(k-1) = -(M(k-1) - (k-1)M(k-2)).$$

Ukupan broj svih dozvoljenih rasporeda je

$$M(k) = (k-1)(M(k-2) + M(k-1)).$$

Poslednja rekurentna relacija se može napisati u obliku

$$(\clubsuit) \quad M(k) - kM(k-1) = -(M(k-1) - (k-1)M(k-2)).$$

Ako obeležimo $N_i = M(i) - iM(i-1)$, tada (\clubsuit) postaje

$$N_i = -N_{i-1}.$$

Ukupan broj svih dozvoljenih rasporeda je

$$M(k) = (k-1)(M(k-2) + M(k-1)).$$

Poslednja rekurentna relacija se može napisati u obliku

$$(\clubsuit) \quad M(k) - kM(k-1) = -(M(k-1) - (k-1)M(k-2)).$$

Ako obeležimo $N_i = M(i) - iM(i-1)$, tada (\clubsuit) postaje

$$N_i = -N_{i-1}.$$

Uzimajući redom $i = 3, \dots, k$, dobijamo

$$N_3 = -N_2, \quad N_4 = -N_3, \quad N_5 = -N_4, \quad \dots, \quad N_k = -N_{k-1},$$

Ukupan broj svih dozvoljenih rasporeda je

$$M(k) = (k-1)(M(k-2) + M(k-1)).$$

Poslednja rekurentna relacija se može napisati u obliku

$$(\clubsuit) \quad M(k) - kM(k-1) = -(M(k-1) - (k-1)M(k-2)).$$

Ako obeležimo $N_i = M(i) - iM(i-1)$, tada (\clubsuit) postaje

$$N_i = -N_{i-1}.$$

Uzimajući redom $i = 3, \dots, k$, dobijamo

$$N_3 = -N_2, \quad N_4 = -N_3, \quad N_5 = -N_4, \quad \dots, \quad N_k = -N_{k-1},$$

pa je

$$N_k = -N_{k-1} = (-1)^2 N_{k-2} = (-1)^3 N_{k-3} = \dots = (-1)^{k-2} N_2,$$

tj.

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^{k-2}(M(2) - M(1)).$$

tj.

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^{k-2}(M(2) - M(1)).$$

Kako je $M(1) = 0$, $M(2) = 1$ i $(-1)^{k-2} = (-1)^k$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^k.$$

tj.

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^{k-2}(M(2) - M(1)).$$

Kako je $M(1) = 0$, $M(2) = 1$ i $(-1)^{k-2} = (-1)^k$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^k.$$

Ako obe strane prethodne jednakosti podelimo sa $k!$ dobićemo



$$\frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

tj.

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^{k-2}(M(2) - M(1)).$$

Kako je $M(1) = 0$, $M(2) = 1$ i $(-1)^{k-2} = (-1)^k$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$M(k) - kM(k-1) = (-1)^k.$$

Ako obe strane prethodne jednakosti podelimo sa $k!$ dobićemo

$$(\spadesuit) \quad \frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Napišimo sada jednakost (\spadesuit) za $k = 2, 3, \dots, k$.

$$\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!},$$

$$\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!},$$
$$\frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!},$$

$$\begin{aligned}\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!}, \\ \frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!}, \\ \frac{M(4)}{4!} - \frac{M(3)}{3!} &= \frac{(-1)^4}{4!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!}, \\ \frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!}, \\ \frac{M(4)}{4!} - \frac{M(3)}{3!} &= \frac{(-1)^4}{4!}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!}, \\ \frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!}, \\ \frac{M(4)}{4!} - \frac{M(3)}{3!} &= \frac{(-1)^4}{4!}, \\ &\vdots \\ \frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} &= \frac{(-1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{M(2)}{2!} - \frac{M(1)}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!}, \\ \frac{M(3)}{3!} - \frac{M(2)}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!}, \\ \frac{M(4)}{4!} - \frac{M(3)}{3!} &= \frac{(-1)^4}{4!}, \\ &\vdots \\ \frac{M(k)}{k!} - \frac{M(k-1)}{(k-1)!} &= \frac{(-1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Sabiranjem ovih $k - 1$ jednakosti ($M(1) = 0$) dobijamo

$$\frac{M(k)}{k!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!},$$

pa, konačno, dobijamo krajnji rezultat

$$M(k) = k! \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

pa, konačno, dobijamo krajnji rezultat

$$M(k) = k! \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

Na primer, prvih nekoliko vrednosti je:

$$M(3) = 2, \quad M(4) = 9, \quad M(5) = 44, \quad M(6) = 265, \quad M(7) = 1854.$$

Problem nenapadajućih topova

Neka je Q_n , $n \geq 2$, broj načina na koji se n topova može postaviti na šahovsku tablu $n \times n$, tako da se topovi međusobno ne napadaju i da se nijedan top ne nalazi na glavnoj dijagonali. Podrazumeva se da glavna dijagonala ide od donjeg levog ugaonog polja, do gornjeg desnog ugaonog polja. Odrediti Q_n za proizvoljno n .

Problem nenapadajućih topova

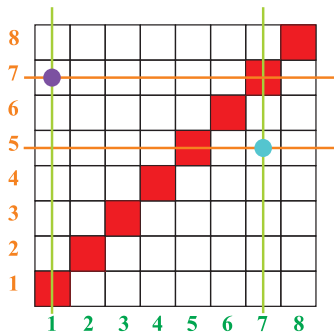
Neka je Q_n , $n \geq 2$, broj načina na koji se n topova može postaviti na šahovsku tablu $n \times n$, tako da se topovi međusobno ne napadaju i da se nijedan top ne nalazi na glavnoj dijagonali. Podrazumeva se da glavna dijagonala ide od donjeg levog ugaonog polja, do gornjeg desnog ugaonog polja. Odrediti Q_n za proizvoljno n .

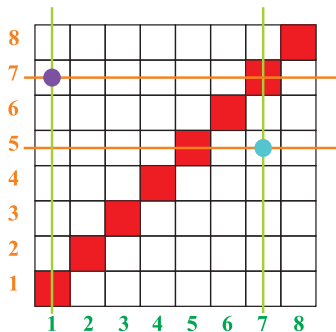
Dva različita topa moraju se nalaziti u različitim vrstama i različitim kolonama šahovske table.

Problem nenapadajućih topova

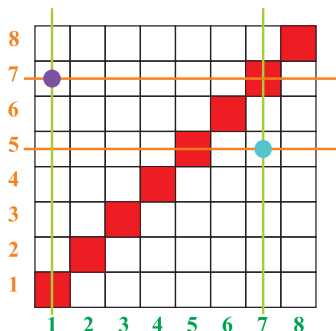
Neka je Q_n , $n \geq 2$, broj načina na koji se n topova može postaviti na šahovsku tablu $n \times n$, tako da se topovi međusobno ne napadaju i da se nijedan top ne nalazi na glavnoj dijagonali. Podrazumeva se da glavna dijagonala ide od donjeg levog ugaonog polja, do gornjeg desnog ugaonog polja. Odrediti Q_n za proizvoljno n .

Dva različita topa moraju se nalaziti u različitim vrstama i različitim kolonama šahovske table. Svako polje šahovske table može se predstaviti uređenim parom (i, j) , gde je i broj vrste, a j broj kolone, pri čemu je $(1, 1)$ donje levo ugaono polje, a (n, n) gornje desno ugaono polje. Nijedan top se ne sme naći na pozicijama oblika (i, i) , $i = 1, \dots, n$.





Postavljeni problem nenapadajućih topova je ekvivalentan problemu pogrešno adresiranih pisama.



Postavljeni problem nenapadajućih topova je ekvivalentan problemu pogrešno adresiranih pisama.

Prema tome:

$$Q_n = n! \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

That's all folks!

**HVALA NA PAŽNJI
I STRPLJENJU!**